

# Plakların hesabı için gerilme seçimli hibrid bir sonlu eleman

**Kutlu DARILMAZ<sup>\*</sup>, Nahit KUMBASAR**

*İTÜ İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 34469, Ayazağa, İstanbul*

## Özet

*Gerilme seçimli hibrid sonlu eleman yöntemi, eleman içinde denge denklemlerini sağlayan gerilme alanı seçimi ile eleman sınırlarında uyumlu yer değiştirmelerin seçimi ilkesine dayanmaktadır. Çalışmada ince ve orta kalınlıkta plakların çözümü için 8 noktalı, genel biçimli, gerilme seçimli hibrid bir dörtgen plak sonlu eleman geliştirilmiştir. Formülasyon Hellinger-Reissner ilkesi esas alınarak elde edilmiştir. Eleman her düğüm noktasında üç adet olmak üzere toplam 24 serbestlik derecesi içermektedir. Elemanın geliştirilmesinde kalınlık doğrultusunda kayma şekil değiştirmelerinin etkisini de göz önüne almak için Reissner-Mindlin plak teorisi esas alınmıştır. Geliştirilen eleman ile literatürdeki çalışmalarda bulunan çeşitli örnekler çözülmüş ve uyumlu sonuçlar elde edilmiştir.*

**Anahtar Kelimeler:** Hibrid sonlu eleman yöntemi, plak, statik hesap.

## An assumed stress hybrid element for analysis of plates

### Abstract

*Finite element method, models a structure as an assemblage of small elements. An important ingredient in a finite element analysis is the behavior of the individual element. In displacement based finite element, formulation of element stiffness matrix depends on interelement-compatible displacement field interpolation. Finite element method based on the assumed-stress hybrid method is a way of formulating a stiffness matrix by use of independent assumptions of an equilibrium stress field within the element and interelement compatible displacement modes on the element boundary. Mathematically the method can be stated as a modified complementary energy principle. In this study an 8-node quadrilateral assumed-stress hybrid plate element is presented. The Element has eight nodes and twenty four degrees of freedom. At each node of the element one displacement and two rotations are taken as unknowns. The element uses the Reissner-Mindlin plate theory, which takes into account the transverse shear effects. To check the the accuracy of the finite element, various examples are solved numerically and compared with the other element solutions . The results obtained from numerical examples demonstrate that the element alleviates the locking phenomenon and produces accurate solutions, has desirable convergence which are in a good agreement with other state-of-the-art element solutions.*

**Keywords:** Hybrid finite element method, plate, static analysis.

---

<sup>\*</sup>Yazışmaların yapılacağı yazar: Kutlu DARILMAZ. [kdarilmaz@ins.itu.edu.tr](mailto:kdarilmaz@ins.itu.edu.tr); Tel: (212) 285 65 33.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ İnşaat Fakültesi'nde tamamlanmış olan "Kabuk sistemlerin çözümü için hibrid bir sonlu eleman" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 08.10.2003 tarihinde dergiye ulaşmış, 21.11.2003 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.03.2005 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

## Giriş

Plakların çözümü için sonlu elemanlar yönteminin kullanımı sonlu elemanlar yönteminin yaygın olarak kullanılmaya başlandığı yıllara kadar gitmektedir ve günümüze kadar bu konuda birçok çalışma bulunmaktadır (Bell, 1969; Irons, 1969). Bu çalışmaların çoğunluğu, şekildeğiştirmeden önce orta düzleme dik olan kesitlerin şekildeğiştirmeden sonra da orta düzleme dik kaldıklarını varsayan ince plak teorisine (Kirchoff plağı) dayanmaktadır.

Plak kalınlığı arttıkça kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinin, plak şekil değiştirmeleri üzerindeki etkisinin arttığı bilinmektedir. Literatürde bu etkilerin gözönüne alındığı yine birçok çalışma bulunmaktadır, (Bergan ve Wang, 1984; Verwood ve Kok, 1990). Bu çalışmalarda çoğunlukla Reissner/Mindlin teorisi esas alınmıştır. Bu teoriyi kullanarak geliştirilen elemanlar ile ilgili en büyük problem kalınlık/açıklık oranının çok küçük olması durumunda "kayma kilitlenmesinin" ortaya çıkması ve gerçekte olduğundan daha rijit davranış gösteren, hatalı sonuçların elde edilmesidir. Bu sorunun aşılması için integrasyon noktalarının azaltılması yöntemi (Hughes, Taylor ve Kanoknukulchai, 1977; Pugh, Hinton ve Zienkiewicz, 1978), kısıtlayıcı yöntemler (penalty methods) (Zienkiewicz, 1979), enerji dengelemesi yöntemi (Fried, 1974) ve karma formülasyonlar (Lee ve Pian, 1978) gibi çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Bu çalışmada ise yukarıda adı geçen yöntemlerden karma formülasyonlar sınıfına giren gerilme seçimli hibrid eleman yöntemi kullanılmıştır.

## Genel bağıntılar

Sonlu elemanlar yöntemi yüzeysel taşıyıcı sistemlerin çözümünde oldukça yaygın olarak kullanılan yaklaşık yöntemlerin başında gelmektedir. Bu yöntemin gelişmiş bir biçimi olan hibrid sonlu eleman yönteminin gerilme seçimli ve yerdeğiştirme seçimli olarak uygulanabildiği çeşitli çalışmalarda gösterilmiştir (Chieslar ve Ghali, 1986; Cheung ve Chen, 1989).

Gerilme seçimli hibrid sonlu eleman yönteminde eleman bağıntılarını elde etmek için denge

denklemlerini sağlayan iç kuvvet alanı ile geometrik uygunluk koşullarını sağlayan yerdeğiştirme alanları birlikte kullanılmaktadır. Bu bağıntıların elde edilmesinde kullanılan fonksiyonellerden olan Reissner-Hellinger ilkesi esas alınarak elde edilen:

$$\Pi_{RH} = \int_V \left( \{\sigma\}^T [D] \{u\} - \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\} \right) dV - \int_V \{u\}^T \{F\} dV - \{q\}^T \{R\} \quad (1)$$

fonksiyonelinin minimum olması gerekmektedir. Fonksiyonelin:

$$\int_V \left( \{\sigma\}^T [D] \{u\} - \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\} \right) dV$$

bölümü iç kuvvetlerin işini,

$$\int_V \{u\}^T \{F\} dV + \{q\}^T \{R\}$$

bölümü  $\{R\}$  düğüm noktası bilinmeyenleri doğrultusunda etkiyen dış yük vektörü olmak üzere dış kuvvetlerin işini göstermektedir.

$[D]$  diferansiyel işlemci olmak üzere:

$$\{\varepsilon\} = [D] \{u\} \quad (2)$$

biçiminde şekildeğiştirme yerdeğiştirme ilişkisi,  $[S]$ , elastisite matrisinin tersi olmak üzere:

$$\{\varepsilon\} = [S] \{\sigma\} \quad (3)$$

biçiminde şekil değiştirme iç kuvvet ilişkisi bulunmaktadır. Eleman içinde denge denklemlerini sağlayacak biçimde, alan değişkenlerine bağlı olarak seçilen iç kuvvet matrisi  $\{\sigma\}$ :

$$\{\sigma\} = [P] \{\beta\} \quad (4)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\{\beta\}$  bilinmeyen parametrelerden oluşan kolon matris,  $[P]$  ise

koordinatlara bağlı eleman içinde gerilmelerin değişimini gösteren bir dikdörtgen bir matristir. Sınırlar boyunca geometrik uygunluk koşullarını sağlamak amacıyla düğüm noktalarında komşu elemanlara ilişkin uç yerdeğiştirmelerinin birbirine eşit olmasını sağlayacak biçimde seçilen yerdeğiştirme fonksiyonu:

$$\{u\}=[N]\{q\} \quad (5)$$

olarak alınabilir.  $[N]$  sınırlar boyunca biçim fonksiyonlarından oluşan matrisi,  $\{q\}$  düğüm noktalarındaki yerdeğiştirme bileşenlerinden oluşan kolon matrisi göstermektedir. Eleman içinde denge denklemlerini sağlayacak biçimde seçilen  $\{\sigma\}$  iç kuvvetlerinin sınırlar üzerindeki bileşenleri,  $[n]$  sınırların doğrultu kosinüslerinden oluşan matris olmak üzere:

$$\{\sigma_s\}=[n]\{\sigma\} \quad (6)$$

şeklinde hesaplanabilir. (4) bağıntısı kullanılarak:

$$\{\sigma_s\}=[n][P]\{\beta\} \quad (7)$$

elde edilir. Yük terimlerinin etkisi daha sonra gözönüne alınmak üzere, (5) ve (7) bağıntıları kullanılarak  $\Pi_{RH}$  fonksiyoneli yeniden düzenlenirse:

$$\begin{aligned} \Pi_{RH} &= \int_S \{\beta\}^T [P]^T [n]^T [N] \{q\} dS \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_V \{\beta\}^T [P]^T [S][P] \{\beta\} dV \end{aligned} \quad (8)$$

biçimini alır.

$$[H] = \int_V [P]^T [S][P] dV \quad (9.a)$$

$$[G] = \int_S [P]^T [n]^T [N] dS \quad (9.b)$$

olmak üzere;  $\delta\Pi = 0$  koşulu sağlanması gerektiğinden  $\frac{\partial\Pi}{\partial\beta_i} = 0$  eşitliği ile:

$$[H][\beta] = [G]\{q\} \quad (10)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıdan elde edilen

$$[\beta] = [H]^{-1} [G]\{q\} \quad (11)$$

eşitliği kullanılarak fonksiyonel düzenlenirse:

$$\Pi_{RH} = \frac{1}{2} \{q\}^T [G]^T [H]^{-1} [G] \{q\} \quad (12)$$

biçimini alır.  $[K]$  rijitlik matrisi olmak üzere:

$$[K] = [G]^T [H]^{-1} [G] \quad (13)$$

tanımı ile  $\Pi_{RH}$  fonksiyoneli:

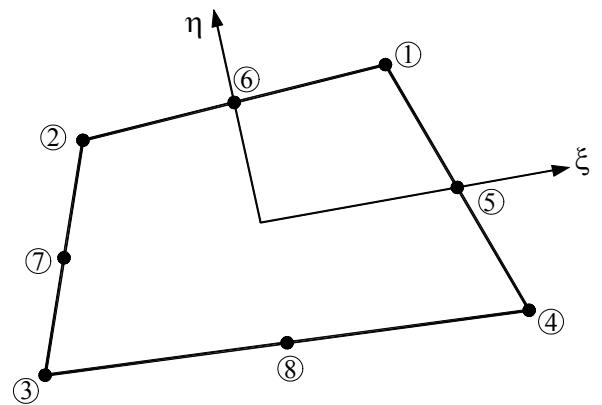
$$\Pi_{RH} = \frac{1}{2} [q]^T [K][q] \quad (14)$$

biçiminde elde edilir.

### Plak sonlu eleman

Şekil 1'de yerel koordinatları ve sekiz düğüm noktası ile verilen bir izoparametrik dörtgen sonlu eleman için kayma şekildeğiştirmelerini de gözönüne alabilmek üzere düğüm noktası yerdeğiştirmeleri; yalnızca  $x$  ve  $y$  koordinatlarının fonksiyonu olarak;  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  dönmeleri ile  $w$  çökmesi biçiminde, bağımsız değişkenler olarak seçilmiştir:

$$[q]_i^T = \{w(x, y) \quad \theta_x(x, y) \quad \theta_y(x, y)\} \quad (15)$$



Şekil 1. Plak sonlu eleman

Gerilme seçimli hibrid sonlu eleman yönteminde iç kuvvet alanı eleman yerel koordinatlarına bağlı olarak seçilmektedir. Bu seçim işlemi

sırasında öncelikle iç kuvvetlerin değişimlerini tanımlayan polinomlar seçilmekte, daha sonra denge denklemlerini sağlayacak biçimde polinomların katsayılarının sayısı indirgenmektedir. Plak denge denklemlerini sağlayacak biçimde seçilen iç kuvvetler (16) bağıntılarında verilmektedir:

$$\begin{aligned} Q_x &= \beta_{25} + \beta_{46} + \beta_{27}x - \beta_{39}x + \beta_{28}y + 2\beta_{48}y \\ &+ 3\beta_{30}x^2/2 - \beta_{42}x^2/2 + \beta_{31}xy - 3\beta_{43}xy + \beta_{32}y^2 \\ Q_y &= \beta_{36} + \beta_{45} + \beta_{38}x + 2\beta_{47}x - \beta_{27}y \\ &+ \beta_{39}y + \beta_{41}x^2 + 3\beta_{49}x^2 - 3\beta_{30}xy \\ &+ \beta_{42}xy + \beta_{31}y^2/2 + 3\beta_{43}y^2 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} M_x &= \beta_{24} + \beta_{25}x + \beta_{26}y + \beta_{27}x^2 + \beta_{28}xy \\ &+ \beta_{29}y^2 + \beta_{30}x^3 + \beta_{31}x^2y + \beta_{32}xy^2 + \beta_{33}y^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \beta_{34} + \beta_{35}x + \beta_{36}y + \beta_{37}x^2 + \beta_{38}xy \\ &+ \beta_{39}y^2 + \beta_{40}x^3 + \beta_{41}x^2y + \beta_{42}xy^2 + \beta_{43}y^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \beta_{44} + \beta_{45}x + \beta_{46}y + \beta_{47}x^2 - \beta_{27}xy \\ &- \beta_{39}xy + \beta_{48}y^2 + \beta_{49}x^3 - 3\beta_{30}x^2y/2 \\ &- \beta_{42}x^2y/2 - \beta_{31}xy^2/2 - 3\beta_{43}xy^2/2 + \beta_{50}y^3 \end{aligned}$$

Gerilme seçimli hibrid elemanlar yönteminde  $\{\beta\}$  katsayılarının sayısı arttıkça oluşturulan eleman davranışı rijitleşmekte, kenarlarda seçilen yerdeğiştirme biçimi karmaşıklıklaştıkça yumuşamaktadır. Bu nedenle gerilme seçimli hibrid eleman yönteminde seçilen iç kuvvet alanı ile yerdeğiştirmelerin uyumu eleman davranışının belirlenmesinde önemli olmaktadır. Şekildeğiştirmeler ile içkuvvetlerin ilişkisini gösteren  $[S]$  matrisi eğilme ve kayma etkilerini yansıtan terimlerden oluşmaktadır. Eğilme etkisini gösteren şekil değiştirme-gerilme matrisi:

$$[S_{\text{eğilme}}] = \begin{bmatrix} \frac{12}{Eh^3} & -v\frac{12}{Eh^3} & 0 \\ -v\frac{12}{Eh^3} & \frac{12}{Eh^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24(1+v)}{Eh^3} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Kayma etkisini gösteren şekil değiştirme-iç kuvvet matrisi:

$$[S_{\text{kayma}}] = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \frac{2(1+v)}{Eh} & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} \frac{2(1+v)}{Eh} \end{bmatrix} \quad (18)$$

şeklindedir.

$[P]$  ve  $[S]$  matrisleri belirlendikten sonra  $[H]$  matrisi (19) bağıntısı ile elde edilir:

$$\begin{aligned} [H] &= \int_A [P]^T [S] [P] dA \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n W_i W_j [P]^T [S] [P] |J| \end{aligned} \quad (19)$$

Eleman üzerinde herhangi bir noktanın bulunduğu koordinatlar,  $\xi, \eta$  ile gösterilen doğal koordinatlar cinsinden tanımlı biçim fonksiyonları ve yerel koordinatlardaki düğüm noktası koordinatlarına bağlı olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$x = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi, \eta) x_i \quad (20)$$

$$y = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi, \eta) y_i \quad (i=1,4)$$

Eleman düzlemindeki bir noktanın koordinatlarının, köşe nokta koordinatlarına bağlı olarak belirlenmesinde kullanılan biçim fonksiyonları (21)'de verilmektedir:

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= (1+\xi)(1+\eta)/4 \\ \bar{N}_2 &= (1-\xi)(1+\eta)/4 \\ \bar{N}_3 &= (1-\xi)(1-\eta)/4 \\ \bar{N}_4 &= (1+\xi)(1-\eta)/4 \end{aligned} \quad (21)$$

Seçilen gerilme alanının, seçilen şekil değiştirme üzerinde yaptığı işi gösteren  $[G]$  matrisi, iç kuvvetlerin sınırdaki bileşenleri:

$$\{\sigma_s\}^T = \{Q_s \quad M_N \quad M_T\}^T \quad (22)$$

$$\{\sigma_s\} = [T_\sigma] \{\sigma\} = [T_\sigma] [P] \{\beta\} \quad (23)$$

ve yerdeğıştirmelerin sınırdaki bileşenleri:

$$\{u_s\} = [T_u] \{u\} = [T_u] [N] \{q\} \quad (24)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} [G] &= \int_S [P]^T [T_\sigma]^T [T_u] [N] dS \\ &= \sum_{i=1}^n [P]^T [T] [N] |J| W_i \end{aligned} \quad (25)$$

şeklinde kenarlar üzerinde integral ile elde edilmektedir.

Elde edilen [H] ve [G] matrisleri yardımıyla (13) bağıntısı kullanılarak eleman rijitlik matrisi oluşturulur. [K] eleman rijitlik matrisinde j nolu kolon, j nolu serbestlik değeri bir, diğer serbestlik değerleri sıfır iken düğüm noktası serbestlikleri doğrultusunda etkiyen uç kuvvetlerinden oluşan vektörü göstermektedir. Serbestlik derecesi kadar denklem bulunduğundan dolayı [K] matrisi kare bir matristir. Geliştirilen elemanda [K] matrisi 24x24 boyutundadır. [K] matrisi eleman yerel koordinatlarında elde edilmiş bir matristir. Genel eksenlerdeki eleman rijitlik matrisi (26) bağıntısı ile elde edilmektedir. Burada [t] doğrultu kosinüslerinden oluşan dönüşüm matrisidir.

$$[K]_{XYZ} = [t]^T [K] [t] \quad (26)$$

Eleman yük vektörü  $\{F\}_p^e$  'nin dönüşümü de:

$$\{F\}_{XYZ}^e = [t]^T \{F\}_p^e \quad (27)$$

şeklinde gerçekleştirilmektedir.

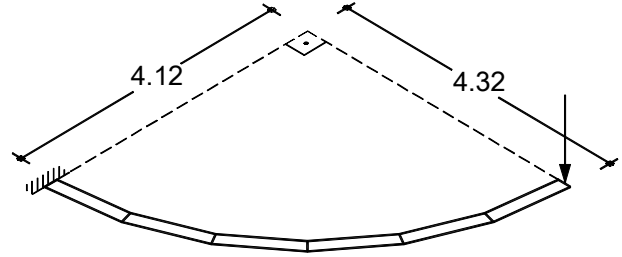
### Sayısal örnekler

Bu bölümde, geliştirilen sonlu eleman (HBQ8) kullanılarak çeşitli örnekler çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar çeşitli çalışmaların sonuçları ve

analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırılarak geliştirilen elemanın yaklaşıklık derecesi belirlenmeye çalışılmıştır.

### Örnek 1

Bir çok çalışmada çözümü yapılan ve boyutları Şekil 2'de verilen eğrisel konsol kiriş boş uca etkiyen düzlemine dik doğrultuda birim yükleme altında çözülmüştür.



Şekil 2. Eğrisel konsol kiriş

Yüklemeye doğrultusundaki yerdeğıştirme değeri elde edilmiş, analitik çözüm ve Aminpour (1992)'deki sonuçlar ile karşılaştırmalı olarak Tablo 1 ve Tablo 2'de verilmiştir. Çözümlemede kullanılan sayısal değerler:  $r_{iç} = 4.12$ ,  $r_{dış} = 4.32$ , Genişlik (b) = 0.1,  $E = 10^7$ ,  $\nu = 0.25$  olarak alınmıştır.

Tablo 1. Elde edilen sonuçların analitik çözüm ile karşılaştırılması

HBQ8	Analitik Çözüm
0.49613	0.5022

Tablo 2. Örnek 1 sonuçlarının diğer çözümler ile oransal karşılaştırması

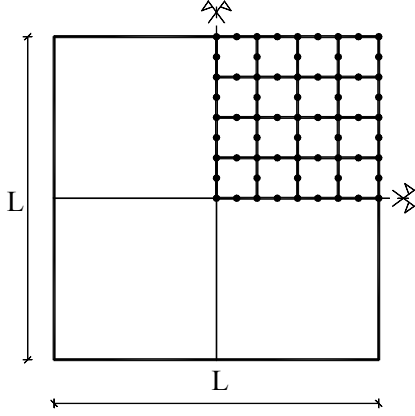
QUAD4	AQR8	HBQ8
0.951	0.956	0.988

### Örnek 2

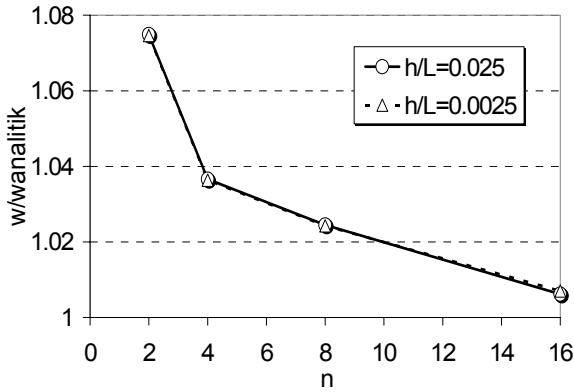
Orta noktasına tekil yük etkiyen basit mesnetli kare plak iki farklı h/L oranı ve farklı sayıda sonlu eleman ağı için çözülmüştür. Simetriden yararlanılarak sistemin 1/4'ü modellenmiştir. Şekil 3'de hesap modeli gösterilmektedir.

Elde edilen sonuçlar Timoshenko ve Woinowsky-Krieger (1970)'de verilen analitik çözüme oran-

lanarak grafiksel biçimde Şekil 4’de verilmektedir. Aynı grafikte farklı plak  $h/L$  oranları için sonuçlar bulunmaktadır. Görüldüğü üzere  $h/L$ ’nin küçük değerleri için kayma kilitlenmesi ortaya çıkmamakta ve ince plak teorisi ile uyumlu sonuçlar elde edilebilmektedir.



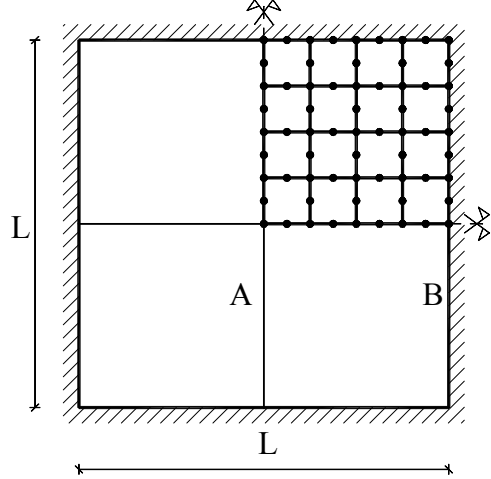
Şekil 3. Basit mesnetli kare plak



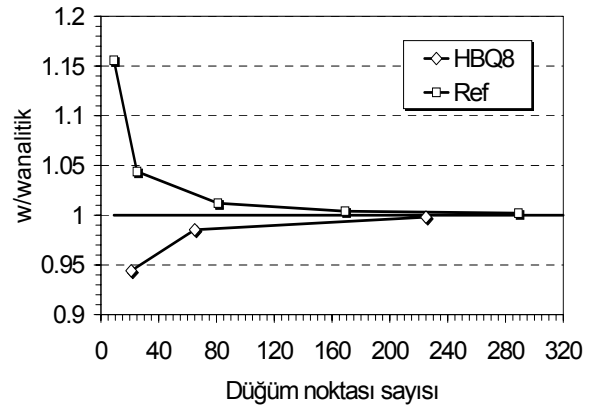
Şekil 4. Tekil yük etkisindeki basit mesnetli kare plakda farklı eleman sayıları için  $w/w_{analitik}$  oranı

### Örnek 3

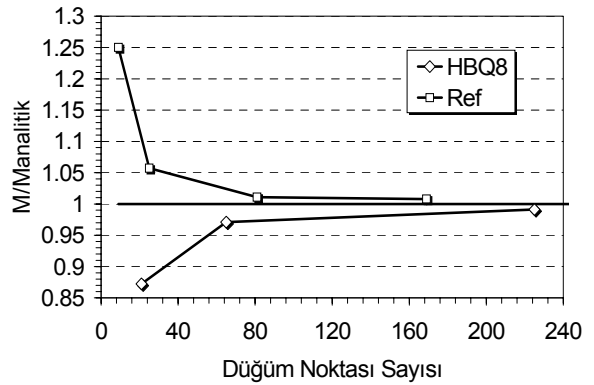
Düzgün yayılı yük etkisindeki dört kenarından ankastre mesnetli kare plak, farklı sayıda sonlu eleman ağı için çözülmüştür. Şekil 5’de simetriden yararlanılarak 1/4’ü modellenen sistem gösterilmektedir. Şekil 6 ve 7’de orta noktadaki çökme değeri farklı sonlu eleman sayıları için İbrahimbegovic (1993)’de verilen eleman ile karşılaştırmalı olarak Timoshenko ve Woinowsky-Krieger (1970)’de verilen analitik çözüme oranlanarak verilmektedir ( $E=1000$ ,  $h=0.1$ ,  $L=4$ ,  $\nu=0.3$ ).



Şekil 5. Dört kenarından ankastre mesnetli kare plak

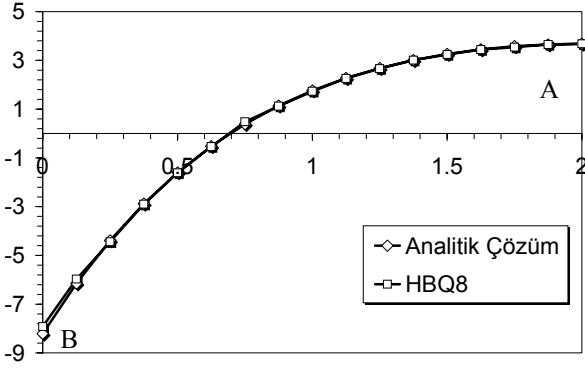


Şekil 6. Orta nokta  $w$  yer değiştirme değerlerinin analitik çözüme oranı



Şekil 7. Orta nokta  $M_x$  değerlerinin analitik çözüme oranı

A-B doğrusu boyunca  $8 \times 8$  eleman ağı kullanarak elde edilen  $M_x$  momenti değişimi, analitik çözüm ile karşılaştırmalı olarak Şekil 8’de verilmektedir.



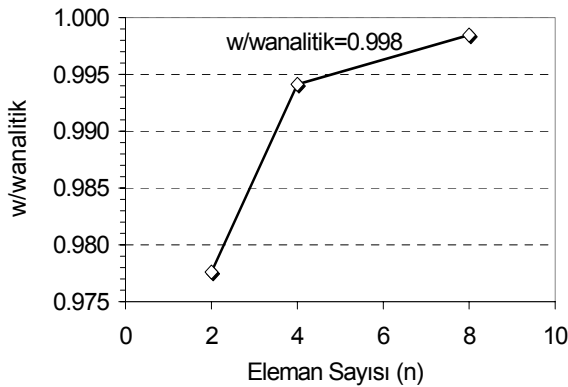
Şekil 8. A-B doğrultusunda  $M_x$  değişimi

Karşılaştırmalardan görüldüğü gibi geliştirilen elemanla elde edilen çözümler hem analitik çözüm hem de karşılaştırmada kullanılan eleman çözümleri ile uyumludur.

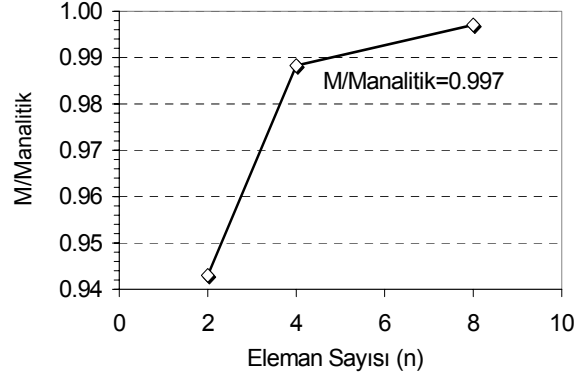
#### Örnek 4

Örnek 2'deki sistem farklı sayıda sonlu eleman ağı için düzgün yayılı yük etkisinde çözülmüştür. Orta noktada elde edilen en büyük çökme ve moment değerleri, Timoshenko ve Woinowsky-Krieger (1970)'de düzgün yayılı yüklerle yüklü basit mesnetli kare plak için verilen değerlere oranlanarak Şekil 9 ve Şekil 10'da verilmiştir.

Karşılaştırmalardan görüldüğü gibi 2x2 eleman ağı için orta nokta çökme değerinin analitik çözüme göre bağıl hatası %2.2 dolaylarında olurken, 8x8 eleman ağı için bu değer % 0.2 olmaktadır. Benzer karşılaştırma  $M_x$  moment değerleri içinde yapılırsa 2x2 eleman ile %5.7, 8x8 eleman ağı için %0.3 bağıl hata bulunmaktadır.



Şekil 9. Farklı eleman sayıları için orta nokta çökme değerlerinin analitik çözüme oranları

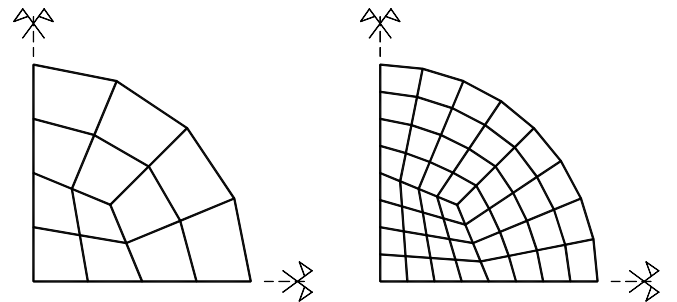


Şekil 10. Farklı eleman sayıları için  $M_x$  değerlerinin analitik çözüme oranları

#### Örnek 5

Sonlu eleman ağının düzensiz olmasının sonuçlar üzerindeki etkisini gözlemleyebilmek için orta noktasına tekil yük etkimekte olan, Şekil 11'de gösterilen ankastre mesnetli dairesel plak çözülmüştür.

Elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında, İbrahimbegovic (1993)'de verilen eleman ile uyumlu olduğu ve sonlu eleman ağının düzensiz olduğu duruma örnek olarak çözülen problemde yakınsamanın sağlanabildiği gözlemlenmiştir (Şekil 12).



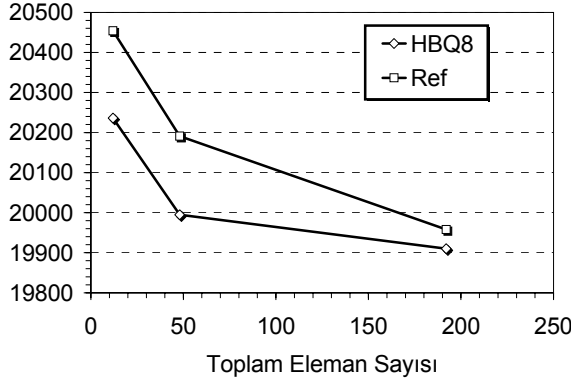
a) 12 Eleman  
b) 48 Eleman  
( $h=0.1$ ,  $E=10.92$ ,  $\nu=0.3$ ,  $P=40$ )

Şekil 11. Merkezinde tekil yük etkisinde ankastre mesnetli dairesel plak

#### Sonuçlar

Çalışmada ince ve orta kalınlıkta plakların çözümü için 8 noktalı, genel biçimli, gerilme seçimli hibrid bir dörtgen plak sonlu eleman

geliştirilmiştir. Çözülen örneklerden elde edilen sonuçlar literatürdeki diğer çalışmalar ve analitik çözümler ile karşılaştırıldığında mühendislik açısından yeterli yaklaşıklıkta ve uyumlu sonuçların elde edildiği görülmektedir.



Şekil 12. Dairesel plakta orta nokta yer değiştirme değerinin eleman sayısına bağlı değişimi

Plâğin kalınlık/açıklık oranının çok küçük olması durumunda bile sonuçlar ince plak teorisi ile elde edilen sonuçlara yaklaşabilmekte, kayma kilitlenmesinin ortaya çıkmadığı bir çözüm elde edilmektedir.

Eleman rijitlik matrisinin elde edilmesi sırasında, gerilme seçimli hibrid sonlu elemanlar yönteminde yer değiştirme esaslı sonlu elemanlara göre daha fazla işlem gerekiyorsa da benzer elemanların kullanılması durumunda, eleman rijitlik matrisinin bir kez elde edilmesi yeterli olacak ve yine benzer elemanların kullanıldığı yer değiştirme esaslı sonlu elemanlar ile aynı çözüm süresine ulaşılabilecektir. Ayrıca kayma kilitlenmesinin ortaya çıkmaması ve daha iyi sayısal yaklaşıklığın sağlanması hibrid elemanın bu sakıncasını karşılar niteliktedir.

Sistemin çözümü için oluşturulan sonlu eleman ağının düzgün olmaması, sonuçları diğer çalışmalardaki düzeyde etkilemekte ve yeter yaklaşıklıkta sonuçlara ulaşılabilmektedir.

Hibrid Sonlu Eleman Yöntemi kullanılarak elde edilen eleman, bilinmeyenler olarak deplasman esaslı olanlarla aynı olduğundan bu tür elemanlarla beraber kullanılabilir.

## Kaynaklar

- Aminpour, M. A., (1992). Assumed-stress hybrid 4-node shell element with drilling degrees of freedom, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33**, 19-33.
- Bell, K., (1969). A refined triangular plate bending element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **1**, 101-122.
- Bergan, P. G., Wang, X., (1984). Quadrilateral plate bending elements with shear deformations, *Computers and Structures*, **19**, 1-2, 25-34.
- Cheung, Y. K., Chen W., (1989). Hybrid quadrilateral element based on mindlin/reissner plate theory. *Computers and Structures*, **32**, 327-339.
- Chieslar, J. D., Ghali, A., (1986). A hybrid strain technique for finite element analysis of plates and shells, *Computers and Structures*, **24**, 749-765.
- Fried, I., (1974). Residual energy balancing technique in the generation of plate bending finite elements, *Computers and Structures*, **4**, 771-778.
- Hughes, T. J. R., Taylor, R. L., Kanoknukulchai, W., (1977). A Simple and efficient finite element for plate bending., *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **11**, 1529-1543.
- Ibrahimbegovic, A., (1993). Quadrilateral elements for analysis of thick and thin plates, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **110**, 195-209.
- Irons, B. M., (1969). A conforming quadratic triangular element for plate bending, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **1**, 29-46.
- Lee, S. W., Pian, T. H. H., (1978). Improvement of plate and shell finite elements by mixed formulation. *AIAA Journal*, **16**, 29-34.
- Pugh, E. D. L., Hinton, E., Zienkiewicz, O. C., (1978). A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **12**, 1059-1079.
- Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S., (1970). *Theory of plates and shells*, Mc Graw Hill, New York.
- Verwood, M. H., Kok, A. W. M., (1990). Shear locking free six-node mindlin plate bending element, *Computers and Structures*, **36**, 547-555.
- Zienkiewicz, O. C., (1979). *The finite element method*, Mc-Graw-Hill, New-York.